Sesión preparatoria OME

10 de diciembre de 2021

1. Un cuadrado grande es cortado por 9 líneas horizontales y 9 verticales, formando 100 regiones rectangulares. Si exactamente 9 de ellas son cuadradas, probar que dos de esas regiones cuadradas tienen el mismo tamaño.

2. [Olimpiada Regional de México, 2015] Separamos los números $1, 2, \ldots, 100$ en dos conjuntos $A = \{a_1, ..., a_{50}\}$ y $B = \{b_1, ..., b_{50}\}$ tales que $a_1 > a_2 > ... > a_{50}$ y $b_1 < b_2 < ... < b_{50}$. Probar que, cualesquiera que sean los conjuntos A y B, siempre se cumple la siguiente igualdad:
$$|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + ... + |a_{50} - b_{50}| = 2500$$

3. Los números $1, 2, ..., 2007$ se escriben (no necesariamente en este orden) formando un círculo. Consideremos todos los grupos de tres números adyacentes. Si 600 de esos grupos tienen tres números impares, y 500 de esos grupos tienen dos números impares y uno par, ¿Cuántos grupos tendrán tres números pares?

4. Supongamos que hay nueve amigos en un restaurante chino sentados en una mesa circular. Cada uno pide un plato diferente que el camarero va depositando en la mesa, en la típica plataforma giratoria que permite compartir los diferentes platos.

   a) Supongamos que el camarero ha dispuesto los platos, cada uno frente a un comensal, de forma que ninguno de ellos cae frente al que lo había pedido. Demuéstrese que, girando la plataforma, es posible conseguir que al menos dos platos se sitúen frente a quien los encargó.

   b) Supongamos que el camarero ha dispuesto los platos de forma que exactamente dos de ellos caen frente a los que lo habían pedido. Demuéstrese que, girando la plataforma, existe otra posición distinta en la que también hay al menos dos platos que se sitúan frente a quien los encargó.

5. [Manhattan Mathematical Olympiad, 2005] Dados 100 números (naturales), probar que podemos escoger 15 de ellos de manera que la diferencia entre dos cualesquiera es múltiplo de 7.

6. [Manhattan Mathematical Olympiad, 2003] Dados n números (naturales), probar que podemos elegir algunos de manera que su suma sea múltiplo de n.

7. Sea $\{x_1, x_2, \ldots, x_{100}\}$ una reordenación del conjunto $\{101, 102, \ldots, 200\}$. ¿Cuántas reordenaciones existen de forma que ningún elemento del conjunto de sumas parciales $\{s_1, s_2, \ldots, s_{100}\}$ sea múltiplo de 3?

   Nota: La suma parcial s_i se define como $s_i = x_1 + \cdots + x_i$.

8. Escribamos los números $1, 2, 3, \cdots, 101$ en cualquier orden. Probar que se pueden quitar 90 de ellos de forma que los 11 restantes están en orden creciente o decreciente.

9. [Teorema de Erdos-Szekeres] (generalización del ejercicio anterior) Dada una sucesión de $n^2 + 1$ números reales distintos, demostrar que se pueden elegir $n - 1$ de ellos que formen una sucesión creciente o decreciente.

10. Un tablero de 100×100 casillas se pinta con 100 colores distintos, de forma que hay exactamente 100 casillas de cada color. Demostrar que hay una fila o una columna que contiene casillas de al menos 10 colores distintos.